Лекция №16. Лень 2. Ну и немного про моделирование разных мастей. Про построение и получение описаний к моделям

Знаете, не все моделирование так легко описывается, как наши модели до нынешнего момента. Некоторые модели похожи. Например, если мы попыаемся абстрагироваться от большинства индивидуальных характеристик индивидуума, то можно промоделировать поведение толпы. Например, при экстренном выходе из здания / помещения. В таком случае, дабы не допустить дополнительного травматизма и жертв, требуется, чтобы пропускная способность проходов была достаточна для пропуска большого количества людей. Моделирование позволит выявить узкие места еще на этапе проектирования здания.

В качестве другой модели можно посмотреть на движение автомобильного трафика. Понятно, что здесь можно собрать большое количество статистики за некоторый срок, которую потом использовать для оптимизации движения, но сочетание ее с моделированием позволит предсказать реакцию трафика на разные вариации настроек светофоров, например, без тестирования вживую.

Про эти модели могу лишь сделать предположение о том, как их можно построить. Это пространственно-распределенные системы, схожие с второй лабораторной работой, но с маленькими интервалами времени между точками моделирования и достаточно высокой дискретностью пространства. Скоростью будем считать расстояние, на которое передвигается объект за один интервал времени. На самом деле, именно этот метод используется в игровых движках. Там и пространство, и время, безусловно дискретны, но сделано все так, что передвижение и другие действия кажутся непрерывными. Каждый человек / автомобиль получает набор правил, по которым двигается — «ИИ», правила случайно варьируются и могут быть как весьма просты (человек любыми способами двигается к выходу), так и весьма сложны (для автомобиля на дороге — зона одновременного обзоране очень велика, нужно учитывать слух, объект уколняется от столкновений с другими участниками и объектами на дороге).

Но строить эти модели мы не будем.

Хочу рассказать немного про другие модели. Например, известно, что существует такая страшная штука, как физика. Там понаписано много «якобы умных» книжек, понаписаны горы каких-то «никому не нужных» формул (ведь все мы знаем, что настоящие индейцы идеальны и без всяких обучений и наук). Но все же.

Известно, что существуют так называемые электромагнитные поля. Это, например, радиоволны, тепловое излучение, свет, рентгеновское излучение и гамма-лучи (радиация в смысле). Так вот, существует давно признанная сообществом модель распространения электромагнитных волн. Модель описывается системой уравнений Максвелла. Приведу ее.

$$\begin{cases} rot\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \\ rot\vec{H} = \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}; \\ div\vec{D} = \rho; \\ div\vec{B} = 0. \end{cases} \tag{1}$$

В некотором приближении эта система дополняется системой материальных уравнений.

$$\begin{cases} \vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}; \\ \vec{B} = \mu\mu_o\vec{H}. \end{cases} \tag{2}$$

Так вот, после прошествия некорого времени рассматривания этой системы, начинаем думать, а как же получить все же решение. А решения в общем случае не существует. Потому, что здесь есть несколько величин. E, D, H, B — это величины полей и индукций. А ρ и j — это плотность заряда и плотность тока. И вот именно две этих величины во многом задают систему. Кроме них задают систему так называемые краевые условия. Это заранее определенная геометрия системы.

При построении мы говорим, где расположены источники (заряды и токи), и как выглядит система. Простой случай: источников нет. Тогда решение системы становится сильно проще и оказывается, что система описывает совокупность плоских волн — бесконечных как по пространству, так и по времени. Если честно, я могу это все качественно расписать, но лень мешает.

Если же не ограничиваться простейшими случаями, то тогда есть несколько способов получения решения. Один опишу словами, а лругой даже немного формулами наверно.

При заданной геометрии и, например, нити тока (прямой, бесконечной длины, сила тока в ней — функция фремени), можно упростить систему, применив интегральное преобразование Фурье по времени.

$$\begin{cases} F(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t} f(t); \\ f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega t} F(\omega). \end{cases} \tag{3}$$

Равенство функций эквивалентно равенству их спектров, так что при применении преобразования Фурье можно перейти к равенству более простых функций. Например, производная по времени выродится в умножение.

$$\frac{\partial f(t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega t}F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\partial e^{i\omega t}}{\partial t}F(\omega) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega t}\omega^2 F(\omega). \tag{4}$$

Если применить еще и преобразование по простанственным координатам, то производные исчезнут и получится решение. Точнее, его спектр. А решение можно будет получить обратным интегрированием.

Пример такого решения:

$$E_y = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega t}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-i\xi x}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\eta e^{-i\eta y}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\zeta e^{-i\zeta z}\frac{\omega^2 e^{-2\frac{\omega^2}{f^2}}}{\frac{\omega^2}{c^2} - \xi^2 - \eta^2 - \zeta^2} \tag{5}$$

Это решение для поля точечного источника, излучающего Гауссов импульс в однородной среде.

Про расчет подоьных вещей, который явно и непосредственно относится к теме моделирования, поговорим несколько позже.

Есть и другие способы получить что-то подобное. Например, метод суммирования фундаментальных решений. Фундаментальным решением называется отклик среды на точечное возмущение. То есть, например, точечный источник, излучивший дельта-импульс. В форме дельта-функции в смысле. Так вот, ФР — штука несложная и довольно просто получаемая в некоторых случаях. И вместо того, чтобы решать задачу по-сложному, можно сложить решение из известных кирпичиков.

Фундаментальное решение для двумерного случая.

$$\frac{\Theta(ct - r)}{2\pi c\sqrt{c^2t^2 - r^2}} \tag{6}$$

Суммирование элементарных возмущений.

$$E_y = \frac{1}{2\pi c}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{U(r,c(t-\tau))} d\xi \frac{f(\xi,\tau)}{\sqrt{c^2(t-\tau)^2 - (r-\xi)}^2} \tag{7}$$

f — функция источника, правая часть волнового уравнения.

Представленное выражение — поле в свободном пространстве.

Эта формула означает, что поле в точке является суммой полей от всех источников, которые (поля) успели прийти в данную точку к нынешнему моменту. При небольшом количестве источников или из не слишком сложной конфигурации эти формулы довольно просты.

Подобный подход имеет некоторые преимущества. Но это сейчас не особо важно.

Хм. Время на исходе. Ладно, продолжим завтра в следующей лекции. Поговорим про расчеты. Контрольных вопросов пока нет. Будут к двум лекциям сразу.