Министерство науки и высшего образования Российской федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«АЛТАЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт цифровых технологий, электроники и физики

Кафедра вычислительной техники и электроники

Курс «Матемагическое мебелирование»
Отчет по хреновой работе №451
«Изучение дифтерезианского уравнения второго погребка»

Сдал анализы ____________

Принял на грудь ____________

Барнаул 2035

1 Цель работы

Тыры-пыры

2 Теотупическое изучение дифтеризианского соравнения

Дано уравнение:

$$\ddot{x} - \alpha\dot{x} + \beta\cos(x) = 0; \tag{1}$$

Преобазуем его в обезразмененную форму и изучим поведедение фунгции x.

Перед членом со старшей проивзводной нет коэффициициента, поэтому на него не нужно делить. Сделаем замену:

$$\begin{aligned}
&t = \mu_t\tau;\\
&\frac{dx}{dt} = \frac{d}{d(\mu_t\tau)}(x) = \frac{1}{\mu_t}\frac{dx}{d\tau};\\
&\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{d(\mu_t\tau)}\left(\frac{d}{d(\mu_t\tau)}(x)\right) = \frac{1}{\mu_t^2}\frac{d^2x}{d\tau^2}.
\end{aligned} \tag{2}$$

Примем, что далtее время в t более примяняться не будет, паэтамо можно принять, шта

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = \ddot{x}; \qquad \frac{dx}{d\tau} = \dot{x}. \tag{3}$$

Подставим замену в уравенние

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\mu_t^2}\ddot{x} - \alpha\frac{1}{\mu_t}\dot{x} + \beta\cos(x) = 0;\\
&\ddot{x} - \alpha\mu_t\dot{x} + \beta\mu_t^2\cos(x) = 0.
\end{aligned} \tag{4}$$

Отметим, что кофефициент при косцинусе не является строго необходимым и на качевстенное поведение системы не влияет, поэтому с помощчю виличыны μ_t его можно свести к едининице.

Получим

$$\begin{aligned}
&\beta\mu_t^2 = 1;\\
&\mu_t = \frac{1}{\sqrt{\beta}};\\
&\ddot{x} - \gamma\dot{x} + \cos(x) = 0, \qquad \gamma = \frac{\alpha}{\sqrt{\beta}}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Далее необходимо разделить уравенние на систему для понижения его поярдка и нахожджения особых точекх.

$$\begin{cases}\dot{x} = y;\\ \dot{y} = \gamma y - \cos(x).\end{cases} \tag{6}$$

Особые точки такой системы это $(\pi/2+\pi n, 0)$. Для опремножения типа особых точек необходимо линеаризовать систему вблизи каждой из них.

$$\begin{aligned} a &= \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x_0,y_0} = 0; & b &= \left.\frac{\partial y}{\partial y}\right|_{x_0,y_0} = 1; \\ c &= \left.\frac{\partial\left(\gamma y - \cos\left(x\right)\right)}{\partial x}\right|_{x_0,y_0} = \left.\sin\left(x\right)\right|_{x_0,y_0}; & d &= \left.\frac{\partial\left(\gamma y - \cos\left(x\right)\right)}{\partial y}\right|_{x_0,y_0} = \gamma. \end{aligned} \tag{7}$$

Система вблизи особой точки принимает вид

$$\begin{cases} \dot{x} = a(x-x_0) + b(y-y_0); \\ \dot{y} = c(x-x_0) + d(y-y_0). \end{cases} \tag{8}$$

Для точек $(\pi/2+2\pi n, 0)$ набор коэфефицийэнтов принимает вид $(0, 1, 1, \gamma)$, а для $(-\pi/2+2\pi n, 0)$ — $(0, 1, -1, \gamma)$. Для первого набора собстбенные числа вещественные, разных знаков — особая точка типа «седло», фазовые траектории — гиперболы.

Для второго набора совстбенные числа либо вещественные, положительные (неустойчивый «узел», параболы), либо комплексно-сопярженные (неустойчивый «фокус», спирали). Первый вариант получается при $\gamma > 2$, второй — при $\gamma < 2$, промежуточная величина $\gamma = 2$ — дикритический «узел».

Возьмем $\gamma = 0.4$.

Итог

$(\pi/2+2\pi n, 0)$ — «седло», гиперболы.
$(-\pi/2+2\pi n, 0)$ — неустойчивый «фокус», спирали.

3 Практика

Моделирование вблизи точки $(\pi/2, 0)$, квадратная область со стороной $2 \cdot 10^{-3}$. Результат на рис. 1. Модерлирование подтдвердило характер фазовых кривых вблизи особой точки. Фазовые траектории — гиперболы.

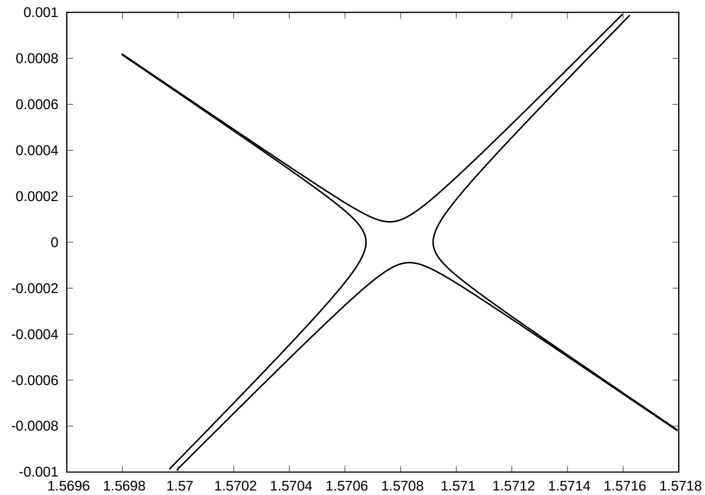

Рис. 1: Точка $(\pi/2, 0)$

Моделирование вблизи точки $(-\pi/2, 0)$, квадратная область со стороной $2 \cdot 10^{-3}$. Результат на рис. 2. Моделиворание подтвердило характер фазовых кривых вблизи особой точки. Фазовая траектория — спираль.

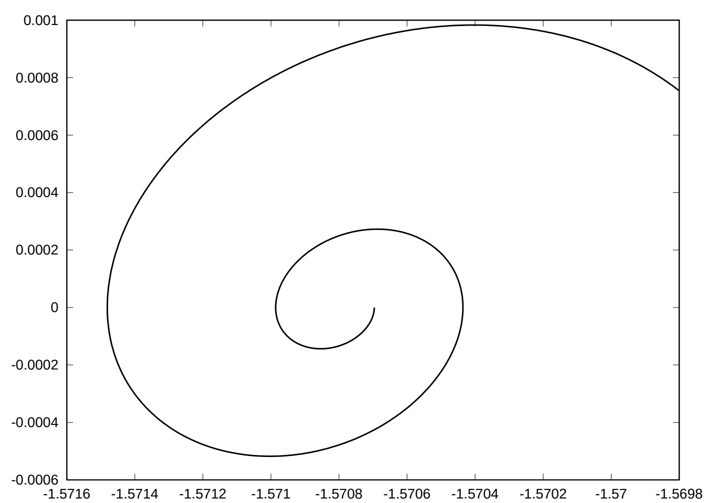

Рис. 2: Точка $(\pi/2, 0)$

Моделирование общей фазовой картины, квадратная область со стороной 20. Результат на рис. 3.

Видно, как траектории отталкиваются от всех особых точек, к гиперболам даже и не подходят. На рисунке изображено множество фазовых траекторий, траетории в нижней части фазовой плоскости уходят налево,

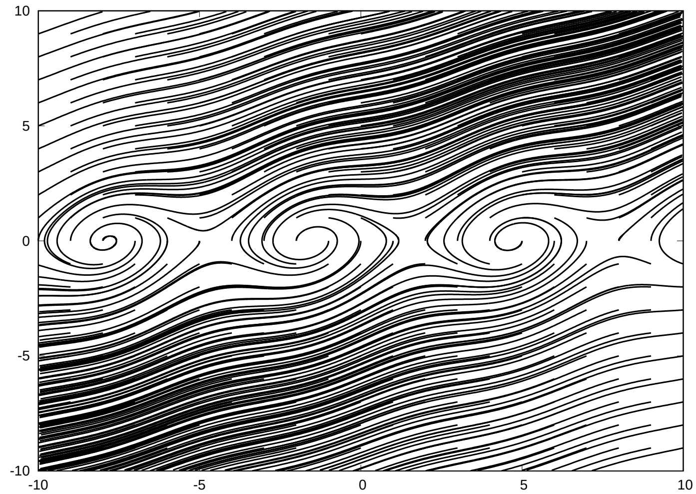

Рис. 3: Точка $(\pi/2, 0)$

в верхней части — направо. С течением времени величина y растет по модулю.

4 Вывод

Что-то хрень какая-то.